Cursul 10 Unde: Fenomene ondulatorii

10.1 Ecuaţia undei plane

Să considerăm un mediu elastic în care o particulă aflată în punctul S începe să oscileze armonic, conform ecuaţiei:

$$y_S(t_S) = A\sin(\omega \cdot t_S) = A\sin(2\pi \cdot \nu \cdot t_S) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_S\right), \quad (1)$$

unde A este amplitudinea, ω este pulsaţia, ν este frecvenţa de oscilaţie, T este perioada, t_S timpul scurs de la începerea oscilaţiei în punctul S.

Dacă considerăm particula S care constituie sursa de oscilaţie, perturbaţia se va transmite in tot mediul. Ecuaţia de mişcare (oscilatorie) a unei alte particule N aflată la distanţa ***d*** de sursa S, va începe după timpul t_d conform ecuaţiei:

$$y_N(t_N) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_N\right), \quad (2)$$

unde t_N timpul scurs de la începerea oscilaţiei în punctul N. Relaţia dintre aceste intervale de timp este:

$$t_N = t_S - t_d = t_S - \frac{d}{v}, \quad (3)$$

astfel ecuaţia de oscilaţie a punctului N este dată de:

$$y_N(t_S) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t_S - \frac{d}{v}\right)\right] = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t_S}{T} - \frac{d}{v \cdot T}\right)\right], \quad (4)$$

unde v este undei plane.

Pentru ca amplitudinea A să rămână aceeaşi este necesar ca oscilaţia să se transmită fără pierderi de energie. Ţinând cont de faptul că lungimea de undă $\lambda = vT$ avem:

$$\Psi_N(x,t) = A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v \cdot T}\right)\right] = A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]. \quad (5)$$

*Relaţia (C6.11) reprezintă **ecuaţia undei plane** şi determină poziţia punctului oscilant care se află la distanta x de sursă în orice moment de timp. Ecuaţia undei plane exprimă faptul că elongaţia y depinde de două variabile, timpul t şi distanta x. Ea este periodică în raport cu ambele variabile.*

Periodicitatea în raport cu timpul este evidenţiată de ecuaţia de mişcare care este de tip armonic pentru un punct N aflat la distanţa x de sursă. Periodicitatea în raport cu distanţa este evidenţiată de faptul că punctele care se găsesc la distanta λ unul de celălalt oscilează în fază.

10.2 Reflexia şi refracţia undelor. Interferenţa undelor. Difracţia undelor

Studiul experimental al fenomenului de propagare a undelor la suprafaţa de separaţie a două medii (care au viteze de propagare a undelor diferite) arată că o parte din ele se întorc în mediul din care au provenit, **se reflectă**, iar cealaltă parte traversează suprafaţa de separare şi se propagă în cel de-al doilea mediu, **se refractă**.

Reflexia Undelor

Definiţie: Se numeşte reflexie, fenomenul de întoarcere al undei în mediul din care a venit la întâlnirea unui obstacol (suprafaţa de reflexie).

Definiţie: Unda care cade pe suprafaţa de reflexie se numeşte undă incidentă.

Definiţie: Unda formată prin reflexie de pe o suprafaţă de reflexie se numeşte undă reflectată.

Definiţie: Se numeşte unghi de incidenţă, $\hat{i}$ *unghiul format între frontul de undă incident descris de raza incidentă şi normala la suprafaţa de reflexie.*

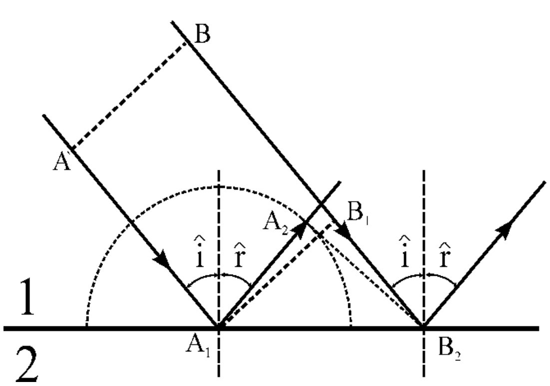

Fig. 1 Folosirea principiului lui Huygens pentru deducerea legilor reflexiei.

Definiţie: Se numeşte unghi de reflexie, $\hat{r}$ *unghiul format între frontul de undă reflectat descris de raza reflectată şi normală la suprafaţa de reflexie.*

Afirmaţie: Unghiul de incidenţă $\hat{i}$ *este egal cu unghiul de reflexie,* $\hat{r}$.

$$\hat{i} = \hat{r}. \tag{6}$$

Reflexiile pot fi:

- Cu pierdere de jumătate de lungime de undă, λ/2.
- Fără pierdere de jumătate de lungime de undă, λ/2.

Ecuaţia undei plane reflectate este atunci:

$$\Psi_r(x,t) = A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\varphi\right)\right], \tag{7}$$

unde φ = π în primul caz şi φ = 0 în cazul al doilea.

Refracţia undelor.

Definiţie: Se numeşte refracţie, fenomenul de traversare al unei suprafeţe de separaţie a două medii omogene.

Definiţie: Unda formata prin refracţie la suprafaţa de separaţie se numeşte undă refractată.

Enunţ: Raportul dintre sinusul unghiului de incidenţă şi sinusul unghiului de refracţie este egal cu raportul vitezelor de propagare a undelor în cele două medii.

$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{B_1B_2}{A_1B_2}\frac{A_1B_2}{A_1A_2} = \frac{v_1\Delta t}{v_2\Delta t} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{8}$$

Şi în cazul refracţiei ca şi în cazul reflexiei raza incidentă, normala şi raza refractată se găsesc în acelaşi plan.

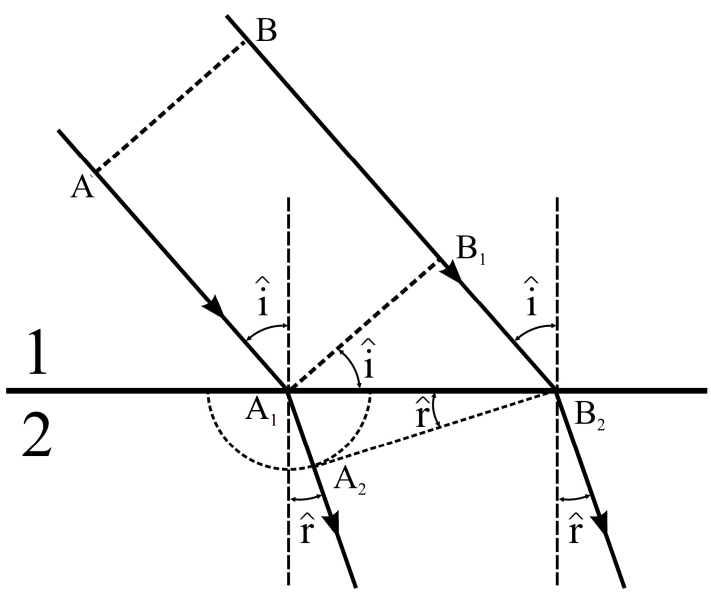

Fig. 2 Folosirea principiului lui Huygens pentru deducerea legilor refracţiei undelor.

Interferenţa undelor

***Principiul superpoziţiei**: Dacă într-un mediu oarecare se propagă unde emise de mai multe surse de oscilaţie, atunci fiecare undă se propagă independent de celelalte.*

În acest caz deplasarea rezultată a fiecărei particule este dată de suma vectorială sau algebrică a deplasărilor provocate de fiecare undă în parte.

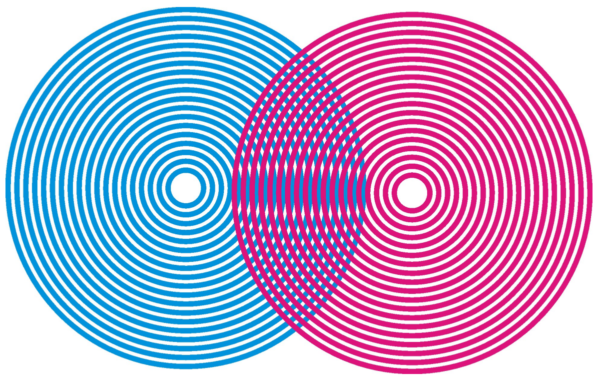

Fig. 3 Suprapunerea a două unde coerente conduce la formarea unei imagini de interferenţă cu maxime şi minime.

*Definiţie: Două unde de aceeaşi natură care au aceeaşi direcţie de oscilaţie, aceeaşi frecvenţă ν şi aceeaşi lungime de undă, au în fiecare punct diferenţa de fază constantă şi se numesc **unde coerente**.*

Definiţie: Fenomenul de suprapunere şi compunere al undelor coerente se numeşte interferenţă.

Să considerăm două unde care provin de la sursele coerente S_1 şi S_2 care se întâlnesc în punctul O. Ecuaţia care descrie oscilaţia în punctul O datorată undelor provenite de la sursa S_1 este:

$$\Psi_1(d_1,t)=A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1}{\lambda}\right)\right]. \tag{9}$$

Ecuaţia care descrie oscilaţia în punctul O datorată undelor provenite de la sursa S_2 este:

$$\Psi_2(d_2,t)=A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_2}{\lambda}\right)\right]. \tag{10}$$

Prin adunarea vectorială a celor două oscilaţii obţinem oscilaţia în punctul O:

$$\Psi(d_1,d_2,t)=y_1(d_1,t)+y_2(d_2,t)=A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1}{\lambda}\right)\right]+A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_2}{\lambda}\right)\right], \tag{11}$$

sau:

$$\Psi(d_1,d_2,t)=2A\,cos\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_2}{\lambda}\right)}{2}\right]\cdot sin\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1}{\lambda}\right)+2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_2}{\lambda}\right)}{2}\right], \tag{12}$$

de unde:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = 2A\, cos\left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right] \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right)\right], \tag{13}$$

care este de forma:

$$\Psi(d_1, d_2, t) = \mathbf{B} \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)\right], \tag{14}$$

care are amplitudinea:

$$B = 2A\cos\left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right]. \tag{15}$$

Se constată că amplitudinea este maximă atunci când:

$$\begin{gathered}\cos\left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right] = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} = n\pi \quad \Rightarrow \\ \Delta = d_2 - d_1 = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2n\frac{\lambda}{2}\end{gathered}, \tag{16}$$

unde $\Delta = d_2 - d_1$ este diferenţa de drum iar $n \in 0, 1, 2...$.

Iar amplitudinea este minimă atunci când:

$$\cos\left[\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \tag{17}$$

unde $n \in 0, 1, 2...$.

În punctele pentru care diferenţa de drum Δ este egală cu un număr par de semilungimi de undă se obţine o amplitudine maximă.

În punctele pentru care diferenţa de drum Δ este egală cu un număr impar de semilungimi de undă se obţine o amplitudine minimă.

Difracţia undelor

*Definiţie: Abaterea undelor de la direcţia iniţială de propagare la traversarea unor orificii sau la întâlnirea unor obstacole se numeşte **difracţie**.*

În cazul difracţiei undele se propagă tot timpul în acelaşi mediu fără schimbarea parametrilor ce o caracterizează.

Observaţii experimentale ale difracţiei undelor:

- Cu cât în planul obstacolului se ecranează mai puţine unde elementare, cu atât mai mult se împrăştie ele în spaţiul geometric de umbră.
- Acelaşi fenomen apare şi în cazul orificiilor.

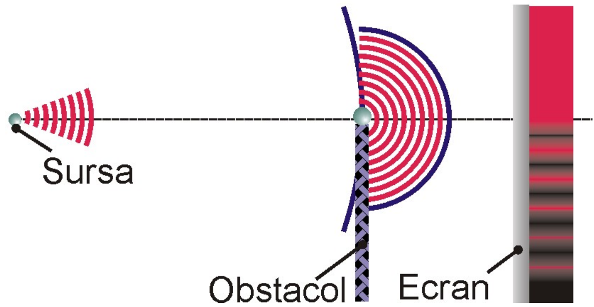

Fig. 4 Difracţia undelor şi apariţia unei imagini cu maxime şi minime în umbra geometrică a obstacolului.

• Dacă se face experienţa cu unde de diferite lungimi de undă se constată că determinant pentru fenomenul de difracţie este raportul dintre lungimea de undă şi mărimea obstacolului.

Pe măsura creşterii dimensiunilor orificiilor sau obiectelor şi a micşorării lungimi de undă, fenomenul de difracţie devine mai slab şi cu atât mai conturat, se detaşează partea difractată a fronturilor de undă de partea nedifractată. Difracţia este deosebit de pronunţată atunci când dimensiunile obstacolelor difractante sunt comparabile cu lungimea de undă.

10.3 Unde staţionare

Un caz particular al interferenţei undelor este producerea undelor staţionare.

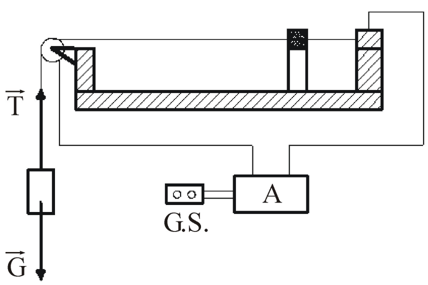

Fig. 5 Dispozitiv experimental pentru punerea in evidenţă a undelor transversale în corzi vibrante.

Definiţie: ***Undele staţionare*** *se obţin prin compunerea a două unde plane cu aceeaşi amplitudine şi perioadă.*

Să presupunem că o undă se propagă de-a lungul unei drepte AA' numită şi undă directa. In punctul A' această undă se reflecta şi pierde o jumătate de lungime de undă. Ecuaţia undei directe este:

$$\Psi_d(x,t) = A \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \tag{18}$$

iar ecuaţia undei reflectate este:

$$\Psi_r(x,t) = A \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) - \pi\right], \tag{19}$$

Prin compunerea celor două unde obţinem:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \Psi_d(x,t) + \Psi_r(x,t)\\ &= A \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l - x}{\lambda}\right)\right] + A \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l + x}{\lambda}\right) - \pi\right],\\ &= 2A\,cos\left[2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right] sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

care se poate scrie sub forma:

$$\Psi(x,t) = 2A\,sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right]cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{\lambda}\right)\right], \qquad (21)$$

care are amplitudinea maximă pentru:

$$sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right] = \pm 1, \qquad (22)$$

astfel:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (23)$$

Punctele care au valori maxime ale amplitudinii se numesc ventre. Iar amplitudinea minimă se obţine pentru:

$$sin\left[2\pi\frac{x}{\lambda}\right] = 0, \qquad (24)$$

astfel:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2n\frac{\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2}. \qquad (25)$$

Punctele care au valori minime ale amplitudinii se numesc noduri.

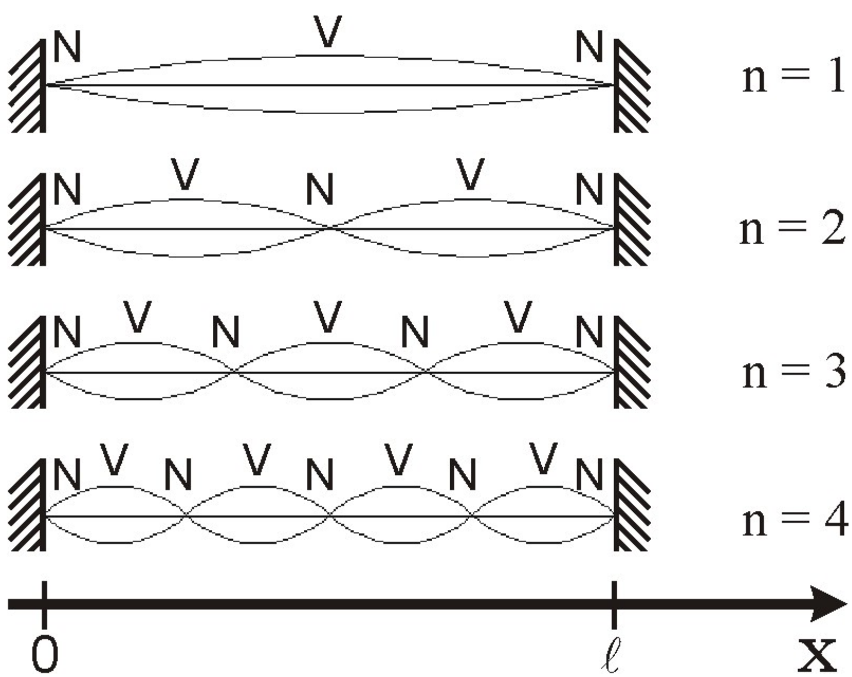

Fig. 6 Modurile de vibraţie, fundamentală şi primele trei armonice, într-o coardă vibrantă. Apariţia nodurilor şi a ventrelor.